ПРЯМІ ТА ОБЕРНЕНІ ЗАДАЧІ МОДЕЛЮВАННЯ РУХУ РЕЧОВИНИ В ОБ'ЄКТАХ СКЛАДНОЇ СТРУКТУРИ

П'янило Я.Д., Лопатьєв А.О., Готра О.З., Трач В.М., П'янило Г.М.
Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України
Львівський державний університет фізичної культури
Львівський державний медичний університет ім. Д. Галицького

Анотація. З використанням принципу моделювання за аналогією розглянута можливість перенесенння деяких результатів, що отримано при розв'язуванні нелінійних диференціальних рівнянь, на об'єкти живої природи. Розглянуто вплив похибки вхідних даних на кінцевий результат.
Ключові слова: математичні моделі, методи розв'язування диференціальних рівнянь, верифікація моделі.

Вступ та аналіз літератури. Моделювання на сучасному етапі розвитку науки є одним з найбільш дієвих і перспективних інструментів вивчення складних явищ та процесів [3]. На ідеї моделювання базуються всі методи наукових досліджень, як теоретичні, при яких використовуються різноманітні абстрактні моделі, так і експериментальні, що користуються предметними моделями.

Зауважимо, що модель повинна бути активною, тобто мати можливість поширюватися в сам об'єкт та відслідковувати його суттєвість. Загальним для моделей є те, що вони є засобами наукового пізнання. Для того, щоб дати загальне визначення моделі, необхідна якомога повна класифікація існуючих моделей. Така задача є складною, тому що існуючі на даний час класифікації моделей будуються, виходячи з потреб тієї області знань, в якій працює дослідник. Традиційним є розподіл моделей на матеріальні та ідеальні.

В області наукового пізнання існують більш конкретні причини для класифікації моделей, а саме, за формою подання моделей (логічні, математичні, механічні, фізичні, хімічні і т.д.), за природою явищ, які моделюються (соціальні, біологічні і т.д.), за задачами моделювання (прогностичні, евристичні тощо), за ступенем точності (наближені, ймовірностні і т.д.) та інші.

Існують декілька підходів до узагальненого визначення моделі. У рамках одного з них під моделлю розуміють відображення фактів, речей, відношень певної області знань у вигляді більш простої, матеріальної структури певної області знань. Таким чином, коли ми говоримо про модель, то мова йде про певні суттєві структури та відношення, аналогічні предметові дослідження.

Для наукових моделей характерним є те, що вони є такою заміною об'єкта дослідження, який перебуває з останньою в такій відповідності, яка дозволяє отримувати нові знання про об'єкт.

Моделювання визначається як метод опосередкованого пізнання за допомогою штучних або природних систем, які зберігають основні особливості об'єкта дослідження, що дає можливість представляти цей об'єкт в певних відношеннях та отримувати про нього нові знання.

Серед інших моделей виділимо математичні моделі. *Математична модель* — це рівняння або система рівнянь, які є записом умов і законів функціонування системи.

Загальна схема математичного моделювання при дослідженні поведінки об'єктів природознавства:
— реальний об'єкт;
— змістовна модель (фізична, біологічна, хімічна і т.п.)
— математична модель;
— розв'язування та дослідження математичної задачі;
— верифікація моделей і аналіз результатів.

Опис систем незалежно від конкретного змісту їх елементів потребує використання деякого набору універсальних параметрів, які повинні відображати структуру системи, зв'язки між підсистемами, взаємодію із зовнішнім середовищем, а також цілеспрямованість системи. Будемо розуміти під рухом системи будь-яку зміну взагалі, будь-яку взаємодію матеріальних об'єктів, або будь-яку криву в просторі станів. Основна задача аналізу — це відбір до розгляду реальних рухів з множини допустимих, формулювання принципів їх відбору.

У різних областях знань принципи відбору різні. Будемо відрізняти три рівні організації матерії: неживу, живу, а також суспільство як найвищу форму організації матерії.

На рівні неживої матерії основні принципи відбору рухів — це закони збереження (енергії, імпульсу, маси і т.д.). Закони збереження не вичерпують усіх принципів відбору рухів, їх часто доповнюють такими положеннями як другий початок термодинаміки, принцип мінімуму дисипації енергії, умовами стійкості. Принцип мінімуму дисипації енергії відбирає з числа можливих рухів, які реалізують закони збереження, ті рухи, реалізація яких приводить до мінімуму росту ентропії.

На рівні живої матерії всі принципи відбору рухів, які вводяться для неживої природи, зберігають свою силу. Тому моделювання починається із запису законів збереження [2]. Однак враховуючи, що йдеться про біологічну макросистему, то основний зміст процесів, які відбуваються в системі — це існування спільнот біологічних видів. При функціонуванні живих організмів повинен бути відбір рухів, які не є наслідком законів збереження, характерних для неживої природи. Для живої природи характерна доцільність дій, тому пояснити, що спостерігається в живому світі, без використання оберненого зв'язку та інформації, взагалі кажучи, неможливо.

Наступним кроком є розгляд біологічних систем, які належіть до класу керованих систем рефлективного типу. Керованих тому, що вони мають вільні функції, які має система і використовує їх для досягнення певної мети. Рефлективність підкреслює простоту залежності керуючої функції від інформації (рефлексу від збудження).

Вводиться поняття організму для системи, що володіє власною метою і можливістю (ресурсом) для її досягнення, тобто цілеспрямованими діями. Організм володіє можливостями утворювати обернені зв'язки. Окремий індивід є організмом. Більш високі ієрархічні рівні вже неможливо рахувати організмом. Таким чином моделювання біологічних систем повинно базуватися на законах збереження та системі обернених зв'язків (функцій поведінки).

Моделювання суспільства потребує введення нових параметрів, так як існує нове явище — трудова діяльність.

У соціальній системі виникають додаткові ускладнення, пов'язані з великим об'ємом інформації і тим, що людина приймає рішення на основі цієї інформації, а зв'язок «сигнал-реакція» не носить характеру рефлексу. Довільна група людей володіє своєю власною метою і засобом її досягнення. Обернений зв'язок описується складним оператором, результат дії якого буває неоднозначним. Поряд з цим часто цей зв'язок неможливо формалізувати.

Таким чином, можна зробити висновок, що якщо в фізиці, хімії (тобто природничих науках) моделі використовуються як прогноз, то в біології та суспільних науках моделі дозволяють отримувати не стільки кількісні характеристики, скільки давати допустимі межі наших дій або тенденції розвитку процесів, що досліджуються.

За порядком розрахунку моделі можна поділити на прямі, обернені (інверсні) та індуктивні.

Використання прямих моделей дозволяє встановити кінетичні, статичні і динамічні закономірності процесів.

Обернені (інверсні) моделі використовують для визначення значень вхідних параметрів та інших заданих або оптимальних початкових властивостей процесів, що вивчаються, а також для визначення допустимих відхилень режимів обробки показників процесів.

Індуктивні моделі необхідні для встановлення або уточнення математичних рівнянь кінетики, статики і динаміки процесів і найчастіше реалізуються експериментально або аналітично з використанням нових гіпотез, форм опису або теорій з наступною перевіркою їх адекватності.

Математичний опис фізичних процесів (прямі моделі) зводиться до диференціальних рівнянь (систем диференціальних рівнянь) звичайних або в частинних похідних. При цьому в модель входять параметри процесу, що вивчається та параметри середовища, в якому проходить процес. Ці параметри можуть визначатися експериментально або на основі побудови інверсних моделей.

Метою роботи є побудова прямої та інверсної моделі руху речовини в одновимірному випадку з врахуванням викривлення напрямку траєкторії, а також дослідження впливу параметрів процесу на величини, що визначають стан системи.

Методи дослідження: метод моделювання за аналогією; побудова числово-аналітичних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь; розв'язування обернених задач математичної фізики; проведення числового експерименту.

Результати дослідження та їх обговорення. Стаціонарний ізотермічний рух речовини в одновимірному випадку можна описати диференціальним рівнянням виду [1, 4]:

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}+\frac{d}{dx}\left(\frac{\upsilon^2}{2}\right)+\lambda\frac{\upsilon^2}{2D}+g\frac{dh}{dx}=0. \qquad (1)$$

Рівняння (1) враховує відхилення траєкторії руху речовини від прямолінійного (функція $h(x)$). Тут позначено: $p=p(x)$ — розподіл тиску; λ — коефіцієнт гідравлічного опору; ρ — густина речовини; υ — швидкість речовини; D — діаметр рухомої речовини; x — біжуча координата $x\in[0,l]$, де l — довжина траси руху. Швидкість речовини υ обчислюються за формулою:

$$\upsilon=\frac{4M}{\pi D^2\rho},$$

M — масова витрата речовини. Якщо T — температура речовини, то густина з тиском пов'язані співвідношенням стану:

$$\rho = f(p,T).$$

В якості співвідношення стану використати зв'язок

$$\rho = p/\chi RT,$$

де $\chi = \chi(p,T)$ — коефіцієнт стисливості речовини; R — газова стала, Тоді при горизонтальному русі речовини в одновимірному випадку без врахування зміни кінетичної енергії розв'язок рівняння (1) для $\chi = const$, $T = const$ має вид:

$$p^2(x) = p_0^2 - \lambda\,\chi \frac{gRT}{D}\left(\frac{M}{S}\right)^2 x. \qquad (2)$$

Якщо траєкторія руху є похилою лінією, то за вказаних вище припущень функція тиску має вигляд:

$$p^2(x) = p_0^2 e^{-b} - \lambda\,\chi \frac{RT}{D}\left(\frac{M}{S}\right)^2 \frac{1-e^{-b}}{b}\,x, \qquad (3)$$

де позначено:

$$S = \frac{\pi D^2}{4}, \qquad b = \frac{2g\Delta h}{zRT},$$

Δh — різниця висот між кінцевою та початковою точками руху речовини.

Якщо ж врахувати зміни параметра стисливості від тиску та зміну температури вздовж траси руху речовини, то розв'язок рівняння (1) можна отримати числовим методом Рунге-Кута. На розподіл тиску значний вплив має коефіцієнт гідравлічного опору λ. При моделюванні реальних об'єктів для його обчислення будуються певні функціональні залежності від геометричних розмірів потоку речовини та її гідродинамічних параметрів. Так, наприклад, для розрахунку гідравлічного опору можна використовувати наступну залежність:

$$\lambda = \left(\frac{Y+\varepsilon+C^{1.5}}{1+76C}\right)^{0.2}, \quad \varepsilon = \frac{k_{ш}}{D}, \quad Y = \frac{79}{\mathrm{Re}}, \quad C = (2Y)^{10}.$$

Тут $k_{ш}$ — коефіцієнт шорсткості об'єктів, Re — числа Рейнольдса:

$$\mathrm{Re} = \frac{D\upsilon p}{\mu_0 RT}\frac{T+C}{273+C}\left(\frac{273}{T}\right)^{1.5},$$

де υ швидкість руху речовини, C — постійна Сатерланда, μ_0 — динамічна в'язкість. Наведена формула отримана шляхом обробки експериментальних даних. Очевидно, що вона є наближеною і має місце в певних межах зміни параметрів, що входять в цю залежність. Для її уточнення необхідно розв'язувати обернені задачі на основі заміряних даних. Достовірність уточнення залежить від адекватності математичної моделі процесу, що вивчається. Для перевірки адекватності проведено наступний числовий експеримент.

На основі отриманих формул обчислювалося значення тиску в кінцевій точці руху речовини і порівнювалося із заміряними значеннями. Результати обчислень подані в таблицях 2 та 3. В таблиці 1 подано вихідні дані, на основі яких проводилась апробація. У таблицях позначено:

pk — заміряне значення вихідного тиску;

pk1 — вихідний тиск, обчислений при сталій вхідній температурі та сталому коефіцієнтові стисливості, обчисленому згідно формули (2);

pk2 — вихідний тиск, обчислений методом Рунге-Кутта рівняння (1) за умови змінності параметрів, що входять в це рівняння;

ro0 — густина речовини в стандартних умовах.

Аналіз отриманих результатів показує, що врахування розподіленості параметрів рівняння (1) приводить до уточнення результатів при великих відборах речовини.

При уточненні математичних моделей фізичних процесів за рахунок врахування додаткових сил або інших величин необхідно дослідити порядок впливу кожної із величин на кінцевий результат.

Очевидно, що при розв'язуванні багатьох практичних задач, зокрема руху крові в судинах, визначення значення коефіцієнта гідравлічного опору пов'язане з певними труднощами. Тому є сенс розглянути задачу про його визначення на основі заміряних даних.

Вихідною формулою для розв'язку поставленої задачі буде:

$$p_0^2 - p^2(x) + 2\chi RT\left(\frac{M}{F}\right)^2 \ln\frac{p(x)}{p_0} = \frac{\lambda\chi RT}{D}\left(\frac{M}{F}\right)^2 x.$$

Нехай відомо значення тиску p_1 в деякій точці $x = x_1$, тобто виконується співвідношення:

$$p_0^2 - p_1^2 + 2\chi RT\left(\frac{M}{F}\right)^2 \ln\frac{p_1}{p_0} = \frac{\lambda\chi RT}{D}\left(\frac{M}{F}\right)^2 x_1.$$

З останньої отримуємо формулу для обчислення початкового наближення гідравлічного опору

$$\lambda_1 = \left(p_0^2 - p_1^2 + 2\chi RT(M/F)^2 \ln p_1/p_0\right) / \left(\chi RT x_1 (M/F)^2/D\right). \qquad (4)$$

Знаючи тепер початкову величину гідравлічного опору, на основі розв'язку рівняння (5) уточнюється значення тиску p_1 в точці $x = x_1$. Маючи тепер уточнене значення тиску, уточнюється значення гідравлічного опору. Ітерації продовжуються до цього часу, поки різниця між двома послідовними ітераціями буде меншою за задану величину точності.

Таблиця 1.

Результати вимірів та дані для порівняння з розрахунком

Вхідний тиск	Об'ємний розхід	Вихідний тиск	Густина
66,8	3516	48,5	0,682
66,8	3509	48,4	0,682
66,7	3507	48,4	0,682
66,6	3501	48,4	0,682
66,5	3499	48,3	0,682

Таблиця 2.

Значення заміряних та обчислених вихідних тисків згідно приведених вище моделей для параметрів з таблиці 1 при різних значеннях густин речовини

ro0=0.67			ro0=0.68		ro0=0.69		ro0=0.70	
pk	pk1	pk2	pk1	pk2	pk1	pk2	pk1	pk2
48.5	48.7	48.78	48.41	48.46	48.09	48.14	47.78	47.82
48.4	48.8	48.86	48.49	48.54	48.18	48.23	47.86	47.91
48.4	48.7	48.74	48.38	48.43	48.06	48.11	47.75	47.79
48.4	48.6	48.68	48.31	48.36	48	48.05	47.68	47.73
48.3	48.5	48.56	48.2	48.25	47.88	47.93	47.56	47.61

Таблиця 3.

Значення заміряних та обчислених вихідних тисків згідно приведених вище моделей для параметрів з таблиці 1 при різних значеннях коефіцієнта шорсткості

k=0.03			k=0.04		k=0.06		k=0.08	
pk	pk1	pk2	pk1	pk2	pk1	pk2	pk1	pk2
48.5	49.2	49.21	47.98	48.01	46.18	46.16	44.8	44.71
48.4	49.2	49.29	48.06	48.1	46.28	46.26	44.9	44.81
48.4	49.1	49.18	47.95	47.99	46.16	46.14	44.78	44.69
48.4	49	49.11	47.88	47.92	46.09	46.08	44.72	44.64
48.3	48.9	49	47.77	47.81	45.98	45.96	44.6	44.52

Гідравлічний опір характеризує вплив швидкості руху, коефіцієнта в'язкості шорсткості та місцевих опорів на депресію тиску вздовж траси руху. Його аналіз дозволяє судити про стан об'єкта, в якому рухається речовина, тобто про наявність в ньому додаткових перешкод для руху речовини. Для цього необхідно знати значення коефіцієнта гідравлічного опору при відсутності додаткових перешкод (фонове значення). Якщо тепер за формулою (4) обчислити значення λ на основі заміряних даних, то його відхилення від фонового значення покаже наявність додаткових перешкод.

Параметри рівняння (1) (кінцевий та початковий тиск, кількість речовини, що транспортується і т.п.) обчислюються на основі фактичних даних, які заміряються з певними похибками, тобто:

$$\lambda = \lambda_0 + \partial\lambda\,,\ \ \chi = \chi_0 + \partial\chi\,,\ \ R = R_0 + \partial R\,,$$

$$T = T_0 + \partial T\,,\ \ \rho_0 = \rho_{00} + \partial\rho_0\,,$$

$$Q_0 = Q_{00} + \partial Q_0\,, p_0 = p_{00} + \partial p_0\,.$$

Тут $Q = \pi \upsilon D^2/4$ об'ємна витрата речовини. Тому кінцевий результат обчислення характеристик руху при використанні моделі (1) отримується з певною неусувною похибкою Для простоти будемо вважати квадратичний закон течії речовини в трубопроводі. Якщо в ньому використати останні співвідношення, то після розкладу отриманого виразу в асимптотичний ряд зі збереженням доданків першого порядку малості отримаємо:

$$p^2 = p_0^2 - a_1 + 2p_{00}\partial p_0 - a_1 \left(2\frac{\partial Q_0}{Q_0} + 2\frac{\partial \rho_0}{\rho_0} + \frac{\partial R}{R_0} + \frac{\partial T}{T_0} + \frac{\partial \lambda}{\lambda_0} + \frac{\partial \chi}{\chi_0} \right),$$

де:

$$a_1 = a\lambda_0 \chi_0 R_0 T_0 \left(Q_{00}\rho_{00} \right)^2, \; a = \frac{4L}{\pi D^5}.$$

З останньої формули випливає, що похибка вхідних даних приводить до похибки визначення вихідного тиску, яка в даній моделі обчислюється:

$$\partial p^2 = 2p_{00}\partial p_0 - a_1 \left(2\frac{\partial Q_0}{Q_0} + 2\frac{\partial \rho_0}{\rho_0} + \frac{\partial R}{R_0} + \frac{\partial T}{T_0} + \frac{\partial \lambda}{\lambda_0} + \frac{\partial \chi}{\chi_0} \right).$$

Висновки. Отримані результати та проведений числовий експеримент підтвердив ефективність розглядуваного підходу до побудови прямих та інверсних моделей фізичних процесів. Використовуючи принцип аналогії в математичному моделюванні, подана методики може бути ефективно використана до дослідження процесу кровообігу людини.

Література

1. *Александров А.В., Яковлев Е.И.* Проектирование и эксплуатация систем дальнего транспорта газа. — М.: Недра, 1974. — 432 с.
2. *Благітко Б.Я., Заячу І.М., Трач В.М., Пирогов О.В.* Математичне моделювання поширення пульсової хвилі у великих кровоносних судинах // Теорія і методика фізичного виховання. — 2007. — № 8. — с. 34—36.
3. *Лопатьєв А.О.* Моделювання як методологія пізнання // Теорія та методика фізичного виховання. — 2007. — № 8. — С. 4—10.
4. *Михалевич О., П'янило Я., Притула М., П'янило Г.* Аналіз впливу гідравлічних параметрів на процес течіння газу в лінійних трубопроводах // Науковий вісник Івано–Франківського національного технічного університету. — №1(7). — 2004. — С. 78—85.

Надійшла до редакції 06.04.09

Пяныло Я.Д., Лопатьев А.А., Готра О.З., Трач В.М., Пяныло Г.М. Прямые и обратные задачи моделирования движения вещества в объектах сложной структуры.
С использованием принципа аналогии рассмотрена возможность перенесения некоторых результатов, полученных при решении нелинейных дифференциальных уравнений, на объекты живой природы. Рассмотрено влияние ошибки входных данных на конечный результат.
Ключевые слова: математические модели, методы решения дифференциальных уравнений, верификация модели.

Pyanylo Ya. D., Lopatiev A. O., Hotra O. Z., Trach V. M., Pyanylo H. M. Direct and inverse problems of modelling of movement of the matter in the objects of complex structure.
By using the method of modelling by analogy it is possible to transfer some results obtained when solving non-linear differential equations to the study of objects of living nature. The influecne of input data errors on the final result is considered.
Keywords: mathematical models, methods of differential equations solving, model verification.