

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ СТАБІЛІЗАЦІЇ СПОРТИВНОГО ЛУКА У ВЕРТИКАЛЬНІЙ ПЛОЩИНІ

Заневський І.П., Львівський державний університет фізичної культури

Анотація. Метою роботи є створення методу механіко-математичного моделювання динамічної стабілізації обертових рухів лука у вертикальній площині, придатного для практичного використання у лучному спорті. Завдання дослідження: розробити модель стабілізатора лука; оцінити ефективність моделі; провести обчислювальний експеримент процесу стабілізації спортивного лука у вертикальній площині. Методи: варіаційний принцип Гамільтона, принцип Даламбера, метод Релея-Рітца, рівняння Лагранжа 2-го роду, метод Рунге-Кутта, методи теорії коливань та динамічної стійкості, метод Ньютона для системи нелінійних рівнянь, чисельні методи систем комп'ютерної математики. Пропонований підхід до проблеми стабілізації лука у вертикальній площині показав свою придатність для розв'язання інженерних задач розробників спортивних луків, а також практики лучного спорту.

Ключові слова: спортивний лук, динаміка, стабілізація, власні форми, частоти.

Постановка проблеми. Головними елементами класичного спортивного лука, що відповідає стандарту Міжнародної федерації стрільби з лука FITA (International Archery Federation) [2], є жорстка центральна частина, звана руків'ям, і дві еластичні штаби (плечі лука), закріплені на кінцях руків'я і з'єднані натягнутою тятивою (Рис. 1). Не підв'язані тятивою плечі мають кривизну на вільних кінцях назовні від лука. Для виконання пострілу лук розміщують вертикально його головною площиною.

Незважаючи на просту, на перший погляд, схему, лук відбуває складний рух у просторі під час пострілу. Переміщення руків'я лука у вертикальній площині за величиною суттєво менші від переміщень стріли, тятиви і плечей. Ціла система лук-стріла відбуває також рухи у поперечному напрямі, але їхня величина є значно меншою порівняно з рухами у вертикальній площині.

Для зменшення величини переміщень руків'я сучасні спортивні луки оснащено стабілізатором – довгим консольним стрижнем, закріпленим до передньої частини руків'я і спрямованим у напрямку мішені. Стабілізатор виконують також у вигляді пакету стрижнів, перехопленому по довжині кількома поперечними хомутами. Додатково до основного стабілізатора до руків'я може бути закріплено від одного до трьох коротких консольних стрижнів, спрямованих у різні напрями відносно основного, але їхня роль у стабілізації лука є меншою [1].

Руки руків'я лука перед пострілом, тобто до випуску тятиви, знаходяться під управлінням стрільця, який виконує прицілювання. Руки під час пострілу, тобто під час спільного руху стріли з тятивою, частково контролюються лучником, який однією рукою впирається в руків'я. Руки лука після пострілу, тобто після того, як стріла полишає тятиву, вже не впливають на політ стріли, однак є дразливими для лучника, що може привести з часом до появи спонтанних рухів лучника внаслідок антиципації неприємних відчуттів.

Роботу виконано в рамках завдань НДР по темі 2.2.5 «Моделювання процесів взаємодії тіла людини зі спортивним приладдям» Зведеного плану науково-дослідної роботи у сфері фізичної культури і спорту на 2006—2010 роки.

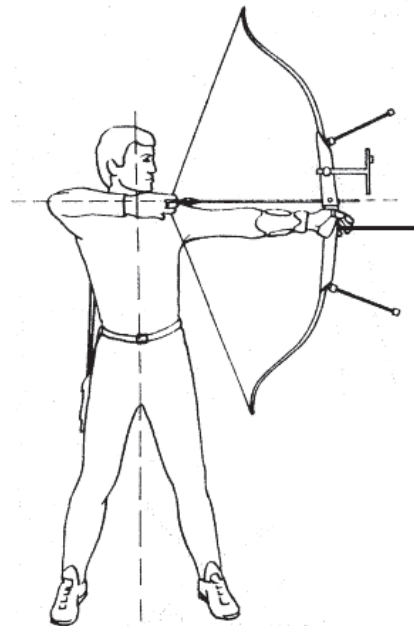


Рис. 1. Стрілець зі спортивним луком [2]

Аналіз останніх досліджень і публікацій. З огляду на велике практичне значення проблеми стабілізації лука ця тема постійно знаходиться в центрі уваги тренерів і спортивних науковців. Однак відомі нам дослідження обмежуються описовим рівнем, відсутні кількісні аналітичні співвідношення. Так, Ellison (1996) класифікував рухи лука по трьох різновидах: лінійні переміщення, обертання і вібрації. Він також описав характер цих рухів стосовно кожної з трьох фаз пострілу [1]. Узагальнюючи аналіз руху стабілізатора, Ellison визначив дві головні його функції таким чином: динамічна стабілізація лука

стосовно обертових луків у вертикальній площині і часткове зменшення віддачі руків'я.

Метою роботи є створення методу механіко-математичного моделювання динамічної стабілізації обертових рухів лука у вертикальній площині, придатного для практичного використання у лучному спорті.

Завдання дослідження: розробити модель стабілізатора лука; оцінити ефективність моделі; провести обчислювальний експеримент процесу стабілізації спортивного лука у вертикальній площині.

Методи: варіаційний принцип Гамільтона, принцип Даламбера, метод Релея-Рітца, рівняння Лагранжа 2-го роду, метод Рунге-Кутта, методи теорії коливань та динамічної стійкості, метод Ньютона для системи нелінійних рівнянь, чисельні методи систем комп'ютерної математики (СКМ).

Результати дослідження. Розглянемо складний шарнірно-важільний механізм з пружним стрижнем, який консольно закріплено до коромисла. За такою схемою створено сучасні спортивні та мисливські луки. Пропонований підхід може бути впроваджений також для аналізу динаміки механізму зі стрижнем, що закріплений до шатуна, повзуна або інших ланок.

Практично цікавими є згинні деформації стрижня, що відбуваються за основною формою власних коливань. Оскільки, енергетичні методи дають можливість отримати результат із точністю, цілком прийнятною для інженерних розрахунків, побудуємо математичну модель задачі на гіпотетичній формі коливань основного тону стрижня, що має одне шарнірне закріплення. Точний розв'язок цієї задачі загальновідомий [6].

Для апробації гіпотетичних форм основного тону коливань стрижня-стабілізатора розглянемо зведену схему складного шарнірно-важільного механізму у вигляді вантажу, закріпленого консольно разом зі стрижнем (рис. 2). Якщо момент інерції маси вантажу суттєво переважає момент інерції маси стрижня відносно осі шарніра, задача наближається до аналізу власних коливань консольного стрижня з нерухомим закріпленням (рис. 2 а). У протилежному випадку – до звичайного стрижня з одним шарнірно закріпленням кінцем (рис. 2 б).

Для гіпотетичної форми коливань основного тону консольного стрижня візьмемо функцію статичного прогину такого стрижня під дією зосередженої на вільному кінці сили (рис. 2 а):

$$\eta(z) = \frac{Fz^2}{6\varepsilon} (z - 3l), \quad (1)$$

де F — величина цієї сили; ε — погонна жорсткість стрижня; l — його довжина; z — поздовжня координата; η — поперечне переміщення. Ця функція задовольняє лише двом з чотирьох гранич-

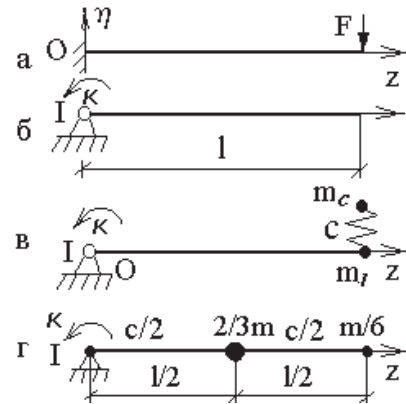


Рис. 2. Розрахункові схеми консольного (а) та шарнірно закріплених (б — 1 і 2-га моделі; в — 3, 4 і 5-та моделі; г — 6-та модель) пружних стрижнів.

них умов, а саме, геометричним умовам — нульовому переміщенню й нульовому куту осі стрижня на консольно закріпленому кінці, а з динамічних умов — тільки умові нульового згинного моменту на вільному кінці стрижня і не задовольняє умові щодо нульової поперечної сили. Проте, використання цієї функції є досить продуктивним, оскільки похибка безрозмірного значення частоти основного тону коливань складає 0,73%.

Як гіпотетичну форму коливань основного тону стрижня з одним шарнірно закріпленням кінцем (рис. 2 б) візьмемо суму лінійної функції та половину синусоїди:

$$\eta = A \sin \frac{\pi z}{l} + \kappa z, \quad (2)$$

де A — константа лінійної комбінації; κ — кут повороту осі пів-синусоїди. Ця функція також задовольняє лише двом з чотирьох граничних умов, а саме — нульовому переміщенню й нульовому згинному моменту на шарнірно закріпленому кінці стрижня. Двом динамічним умовам, а саме, нульовій поперечній силі й нульовому згинному моменту на вільному кінці стрижня ця функція не задовольняє, однак, її використання призводить також до пристойного за похибкою результату безрозмірного значення частоти основного тону коливань (1,10%).

У прикладній теорії механічних коливань доведено, що точність визначення власних частот при використанні прямих методів, до яких належать й енергетичні методи, відповідає точності прийнятої форми [6].

Оскільки у відомих нам публікаціях не розглядається задача визначення частот власних коливань пружного стрижня з одним шарнірно закріпленням кінцем і приєднаним до цього кінця вантажем, розглянемо цю задачу, з використанням варіаційного принципу Гамільтона. Варіація функціонала по часу:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - P) dt = 0,$$

$$\text{де } T = \frac{1}{2} \left[\int_0^l \mu \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 dz + I \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial z \partial t} \right)^2 \right]_{z=0} \quad \text{і}$$

$$P = \frac{1}{2} \int_0^l \varepsilon \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \right)^2 dz$$

— відповідно кінетична й потенціальна енергія системи; μ — погонна маса стабілізатора; t — час; I — момент інерції приєднаного вантажу відносно осі шарніра.

Підставляючи вирази енергії до виразу функціонала, отримуємо відповідне диференціальне рівняння та граничні умови задачі:

$$\mu \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} = 0;$$

$$z = 0, \eta = 0, \varepsilon \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} = I \frac{\partial^3 \eta}{\partial z \partial t^2};$$

$$z = l, \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} = 0, \frac{\partial^3 \eta}{\partial z^2} = 0, \quad (3)$$

Розв'язком задачі (3), отриманим з використанням функцій Крилова, є корені детермінанта:

$$\begin{vmatrix} 2kl & v(kl)^4 & v(kl)^4 \\ ch(kl) + \cos(kl) & sh(kl) & -\sin(kl) \\ sh(kl) - \sin(kl) & ch(kl) & -\cos(kl) \end{vmatrix} = 0, \quad (4)$$

де $kl = 4 \sqrt{\frac{ml^3 \omega^2}{\varepsilon}}$ — безрозмірне значення власної частоти; m — маса стрижня; ω — власна частота; $v = \frac{I}{ml^2}$ — безрозмірне значення моменту інерції вантажу. Нульовий розв'язок рівняння (4) відповідає обертанню стрижня з вантажем відносно осі шарніра. При $v = 0$ отримуємо $kl = 3,927$; ..., що співпадає з відомими розв'язками для стрижня з одним шарнірно закріпленим кінцем. При $v = \infty$ нульового розв'язку немає: $kl = 1,875$; ..., що повторює відомий розв'язок для консольно закріпленого стрижня [3]. Розв'язки для частоти основного тону при різних співвідношеннях мас-інерційних параметрів представлено в таблиці 1.

Таблиця 1

Значення відносних похибок безрозмірного значення власної частоти основного тону для різних розрахункових моделей стабілізатора (%)

lgv	Розрахункова модель					
	1	2	3	4	5	6
-6	9,30	1,10	1055,69	959,79	-34,62	5,26
-5	9,30	1,11	550,01	496,07	-34,61	5,27
-4	9,18	1,12	265,79	235,44	-34,58	5,20
-3	8,10	1,25	107,21	90,01	-34,25	4,61
-2	2,54	3,41	25,59	15,17	-30,66	1,82
-1	0,27	15,52	3,27	-5,30	-12,90	3,08
0	0,66	21,01	0,98	-7,40	-1,35	4,36
1	0,72	21,72	0,76	-7,60	0,51	4,52
2	0,73	21,80	0,71	-7,65	0,69	4,52
3	0,74	21,81	0,74	-7,62	0,74	4,55

Варіанти моделі. Приймаючи гіпотетичну форму основного тону коливань, приходимо до рівнянь Лагранжа другого роду:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q_i'} \right) + \frac{\partial P}{\partial q_i} = 0, \quad (5)$$

де q_i — узагальнені координати. Рискою позначено частинну похідну по часу: $(\cdot)' \equiv \frac{\partial}{\partial t}$.

Модель 1 будуємо на основі суми функції (1) та лінійної функції:

$$\eta = A \left(\frac{z}{l} \right)^2 \left(\frac{z}{l} - 3 \right) + \kappa z. \quad (6)$$

За узагальнені координати прийнято A і κ . Кут повороту вантажу: $\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \right)_{z=0} = \kappa$. Після підстановки гіпотетичної форми (6) у вирази енергії, а потім в (5), отримуємо вираз для частоти основного тону:

$$(kl)^4 = 12 \left(33/35 - \frac{121/400}{1/3+v} \right). \quad (7)$$

Для моделі 2 використано гіпотетичну форму (2). Подібно до попереднього отримуємо кут повороту вантажу, який дорівнює $\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \right)_{z=0} = \kappa + \frac{\pi A}{l}$, а також частоту основного тону:

$$(kl)^4 = \frac{\pi^4}{2} \left[\frac{1}{2} + v\pi^2 - \frac{(1/\pi + v\pi)^2}{1/3 + v} \right] \quad (8)$$

У моделі 3 гіпотетичну форму представлено виразом:

$$\eta = A + \kappa z, \quad (9)$$

а жорсткість і масу стрижня зведено до його вільного кінця (рис. 2 в) за функцією (1): $c = \frac{3\varepsilon}{l^3}$; $m_c = \frac{33}{140}m$. Відповідний вираз для частоти основного тону має вигляд:

$$(kl)^4 = \frac{140(1/3 + v)}{11v} \quad (10)$$

Модель 4 відрізняється від моделі 3 тільки величиною зведеної маси $\left(m_c = \frac{m}{3}\right)$, що відповідає величині моменту інерції маси стрижня відносно осі шарніра. У цьому випадку формула для частоти основного тону має вигляд:

$$(kl)^4 = \frac{9(1/3 + v)}{v}. \quad (11)$$

Модель 5 є комбінацією двох попередніх моделей $m_c = \frac{33}{140}m$; $m_l = \frac{41}{420}m$. Загальна зведена маса $\left(m_c + m_l = \frac{m}{3}\right)$ також відповідає величині моменту інерції маси стабілізатора. Частота основного тону обчислюється за виразом:

$$(kl)^4 = 3 \left[33/140 - \frac{(33/140)^2}{1/3 + v} \right]. \quad (12)$$

В моделі 6 масу стабілізатора зведено до трьох точок — кінців $\left(m_0 = m_2 = \frac{1}{6}m\right)$ та середини стабілізатора $\left(m_1 = \frac{2}{3}m\right)$. Жорсткість зведено до двох однакових зосереджених між точковими масами елементів: $c_1 = c_2 = \frac{6\varepsilon}{l^3}$. З використанням функції (6), отримано вираз для частоти основного тону:

$$(kl)^4 = (219/16) \left[89/96 - \frac{169/576}{1/3 + v} \right] \quad (13)$$

Результати щодо точності всіх шести моделей (7), (9)-(13) відносно розв'язку (4) зведено в таблиці 1.

З точки зору точності частоти основного тону привертають до себе увагу моделі 1, 2 і 6. Причому модель 1 дає прийнятні з інженерної точки зору результати для широкого спектру співвідношень мас-інерційних характеристик стабілізатора й вантажу $(-1 < \lg v < \infty)$. Модель 2 є прийнятною тільки для малих вантажів $(-\infty < \lg v < -3)$. Застосування моделі 6 призводить загалом до посередніх результатів, і тільки у вузькому діапазоні співвідношень $(\lg v \approx -2)$ похибка результату для частоти основного тону є прийнятною. Результати розв'язків для частоти основного тону, отримані з використанням моделей 1, 2 і 6 представлено у графічній формі порівняно з результатами точного розв'язку (рис. 3).

Виходячи з реальних співвідношень мас-інерційних характеристик стрижня й вантажу $(-2 < \lg v < 2)$, на підставі отриманих результатів (див. табл. 3, рис. 4) слід визнати найкращою, з точки зору точності, модель 1. Найменшу похибку для частоти основного тону (0,16%) ця модель забезпечує при співвідношенні $v=0,0537$.

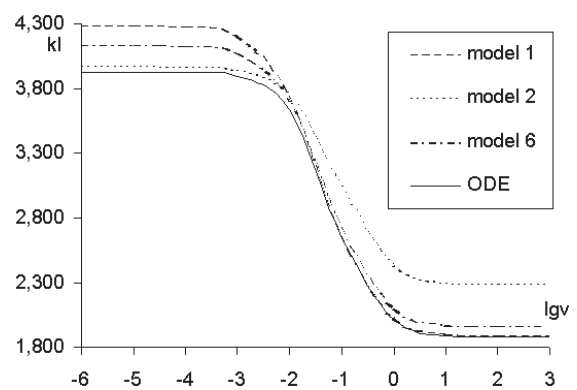


Рис. 3. Залежності частоти основного тону коливань системи лук-стабілізатор від мас-інерційних характеристик: ODE — точний розв'язок диференціального рівняння (3)

Апробація моделі стабілізатора. Моделюючи процес прицілювання, можна припустити, що на лук діють тільки дві зовнішні сили (рис. 4): в т. О — сила упору руки стрільця в руків'я лука і в т. А — сила відтягування тятиви:

$$\begin{aligned} \xi_A &= l_U \sin \theta_U + s_U \sin \gamma_U; \\ \xi_A &= l_L \sin \theta_L + s_L \sin \gamma_L; \\ \eta_A &= h_U + l_U \cos \theta_U - s_U \cos \gamma_U; \\ \eta_A &= s_L \cos \gamma_L - l_L \cos \theta_L - h_L; \\ c_U(\theta_U + \varphi_U) &= F_U l_U \sin(\theta_U + \gamma_U); \\ c_L(\theta_L + \varphi_L) &= F_L l_L \sin(\theta_L + \gamma_L); \\ F_\xi &= -F_U \sin \gamma_U - F_L \sin \gamma_L; \\ F_\eta &= F_U \cos \gamma_U - F_L \cos \gamma_L; \end{aligned}$$

$$F_U = f \frac{s_U - S_U}{S_U}; \quad F_L = f \frac{s_L - S_L}{S_L}; \quad (14)$$

$$tg \phi = \frac{F_\eta}{F_\xi}; \quad tg \phi = \frac{\eta_A}{\xi_A}$$

де l_U, l_L — приведені довжини плечей лука; s_U, s_L — довжини гілок тятиви лука; S_U, S_L — довжини гілок нерозтягнутої тятиви; h_U, h_L — довжини верхньої та нижньої частин руків'я, тобто відстані від осі руків'я (т. О) до осей пружних елементів плечей; c_U, c_L — приведена жорсткість плечей; F_U, F_L — сили розтягу гілок тятиви; F_ξ, F_η — проекції сили розтягу тятиви на осі; l_a — довжина стріли (а також величина розтягу лука); f — погонна жорсткість тятиви. Індексами "U" і "L" позначено параметри відповідно верхньої та нижньої частин лука.

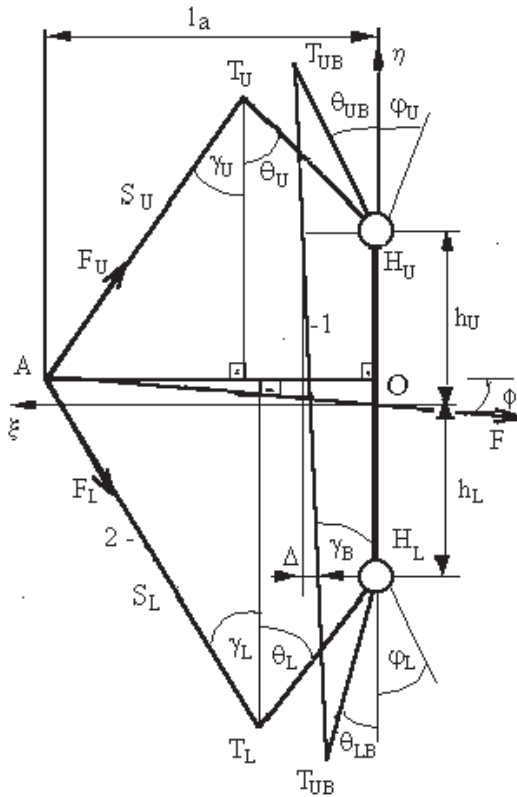


Рис. 4. Схема моделі лука: 1 — тятива накинута, 2 — тятива розтягнута

Математична модель лука з накинutoю тятивою є такою:

$$l_U \cos \theta_{UB} + l_L \cos \theta_{LB} + h_U + h_L = 2s_B \cos \gamma_B;$$

$$l_U \sin \theta_{UB} - l_L \sin \theta_{LB} = 2s_B \sin \gamma_B;$$

$$F_B l_U \sin(\theta_{UB} - \gamma_B) = c_U(\theta_{UB} + \varphi_U);$$

$$F_B l_L \sin(\theta_{LB} + \gamma_B) = c_L(\theta_{LB} + \varphi_L);$$

$$F_B = f \frac{s_B - S}{S}, \quad (15)$$

де s_B — довжина тятиви, накинutoї на лук; F_B — сила розтягу тятиви; S — довжина нерозтягнутої тятиви (див. рис. 4). Індекс "B" використано для позначення параметрів лука з накинutoю тятивою.

Системи рівнянь (14) і (15) мають нелінійні та трансцендентні функції, тому не піддаються аналітичному розв'язанню. Тому для розв'язання задач статки лука нами використано чисельний метод Ньютона, реалізований у програмі Find з комп'ютерного пакету Mathcad 2000i Professional (www.mathsoft.com).

Користуючись головними підходами до розв'язання задачі динаміки лука [4, 5], запишемо рівняння енергії лука (рис. 5):

$$T = \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} & (m_A + m_a) \xi_A'^2 + m_A \eta_A'^2 \\ & + \int_0^{l_a} \mu(z) (\eta_A' + z \psi')^2 dz + \\ & (I_H + m_U h_U^2 + m_L h_L^2) \kappa'^2 \\ & + I_U (\theta_U' + \kappa')^2 + I_L (\theta_L' - \kappa')^2 \\ & + 2\kappa' \left[m_U r_U h_U (\theta_U' + \kappa') \cos(\theta_U + \kappa) - \right. \\ & \left. - m_L r_L h_L (\theta_L' - \kappa') \cos(\theta_L - \kappa) \right] \end{aligned} \right\};$$

$$P = \frac{1}{2} \left[\begin{aligned} & c_U (\theta_U + \varphi_U)^2 + c_L (\theta_L + \varphi_L)^2 \\ & + \frac{f}{S_U} (s_U - S_U)^2 + \frac{f}{S_L} (s_L - S_L)^2 \\ & + \xi_A'' \int_0^{l_a} \mu(z) z \psi^2 dz + 2g \int_0^{l_a} \mu(z) (\eta_A + z \psi) dz \end{aligned} \right] \quad (16)$$

де $m_A = \frac{1}{3} m_s$ — приведена до гнізда маса тятиви; m_s — маса тятиви; m_a — маса стріли; $\mu(z)$ — погонна маса деревка стріли; z — координата осі стріли; ψ — кут піднесення стріли; I_H — момент інерції руків'я відносно т. О; m_U, m_L — маси плечей з приведеною до них масою тятиви ($\frac{1}{3} m_s$); I_U, I_L — моменти інерції плечей лука; r_U, r_L — відстані центрів мас плечей від осей шарнірів; g — прискорення вільного падіння.

Кінетична й потенціальна енергія стабілізатора з врахуванням частоти основного тону (6) за моделлю 1 є такою:

$$T_{st} = \frac{1}{2} m_{st} \left(\frac{33}{35} A'^2 + \frac{1}{3} l_{st}^2 \kappa'^2 + 2 \frac{11}{20} l_{st} A' \kappa' \right);$$

$$P = \frac{1}{2} c_{st} (2A)^2, \quad (17)$$

де $c_{st} = 3 \frac{\varepsilon}{l_{st}^3}$ — жорсткість стабілізатора на згин (див. рис. 2 а).

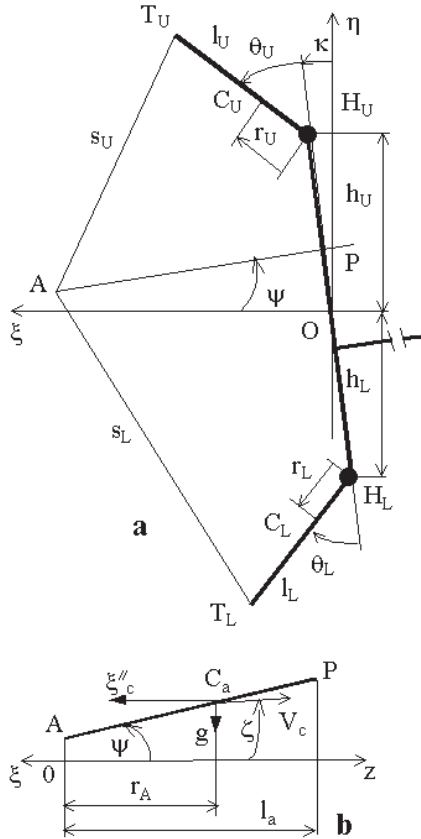


Рис. 5: Схема динамічної моделі: а — лук зі стабілізатором; стріла.

Підставляючи вирази (16) і (17) в рівняння Лагранжа (5), отримуємо систему диференціальних рівнянь другого порядку відносно узагальнених координат $q_i \equiv \xi_A, \eta_A, \psi, \theta_U, \theta_L, \kappa, A$:

$$\begin{aligned}
 & (m_A + m_a)\ddot{\xi}_A - e_U S_2 + e_L S_4 = 0; \\
 & (m_A + m_a)\ddot{\eta}_A + m_a r_A \ddot{\psi} + m_a g - e_U S_1 + e_L S_3 = 0; \\
 & I_A \ddot{\psi} + m_a r_A (\ddot{\eta}_A + \xi_A \ddot{\psi} + g) = 0; \\
 & I_U (\ddot{\theta}_U + \kappa'') + m_U r_U h_U b_1 \kappa'' + \\
 & c_U (\theta_U + \varphi_U) + e_U l_U (b_1 S_2 - b_2 S_1) = 0; \\
 & I_L (\ddot{\theta}_L - \kappa'') - m_L r_L h_L b_3 \kappa'' + \\
 & c_L (\theta_L + \varphi_L) - e_L l_L (b_3 S_4 + b_4 S_3) = 0; \\
 & (I_H + I_U + I_L + m_U h_U^2 + m_L h_L^2 + \frac{1}{3} m_{st} l_{st}^2) \kappa'' + \\
 & + m_U r_U h_U [b_1 (\ddot{\theta}_U + 2\kappa'') - b_2 (\theta'_U + \kappa')^2] + \\
 & + I_U \ddot{\theta}_U - I_L \ddot{\theta}_L + \frac{11}{20} m_{st} l_{st} A'' - \\
 & - m_L r_L h_L [b_3 (\ddot{\theta}_L - 2\kappa'') - b_4 (\theta'_L - \kappa')^2] + \\
 & + e_U [S_2 (b_1 l_U + h_U) - S_1 b_2 l_U] + \\
 & + e_L [S_4 (b_3 l_L + h_L) + S_3 b_4 l_L] = 0; \\
 & m_{st} (\frac{11}{20} l_{st} \kappa'' + \frac{33}{35} A'') + 4c_{st} A = 0, \quad (18)
 \end{aligned}$$

де I_A — момент інерції стріли відносно хвостовика; r_A — відстань від хвостовика до центра маси стріли;

$$e_U = \frac{f(s_U - S_U)}{s_U S_U}; \quad e_L = \frac{f(s_L - S_L)}{s_L S_L};$$

$$s_U = \sqrt{S_1^2 + S_2^2}; \quad s_L = \sqrt{S_3^2 + S_4^2};$$

$$S_1 = h_U + l_U b_1 - \eta_A; \quad S_2 = h_U \kappa + l_U b_2 - \xi_A;$$

$$S_3 = h_L + l_L b_3 + \eta_A; \quad S_4 = h_L \kappa - l_L b_4 + \xi_A;$$

$$b_1 = \cos(\theta_U + \kappa); \quad b_2 = \sin(\theta_U + \kappa);$$

$$b_3 = \cos(\theta_L - \kappa); \quad b_4 = \sin(\theta_L - \kappa).$$

Початкові умови задачі Коші:

$$t = 0, \quad \xi_A = l_a; \quad \eta_A = \eta_{A0}; \quad \theta_U = \theta_{U0};$$

$$\theta_L = \theta_{L0}; \quad \kappa = 0; \quad \psi = \psi_0; \quad A = 0;$$

$$\xi'_A = 0; \quad \eta'_A = 0; \quad \theta'_U = 0; \quad \theta'_L = 0;$$

$$\kappa' = 0; \quad \psi' = 0; \quad A' = 0,$$

(19)

де константи $\eta_{A0}, \theta_{U0}, \theta_{L0}$ — це розв'язки задачі статки (14). Нульові значення похідних у початкових умовах відповідають сучасним вимогам до техніки виконання пострілу: затамувати дихання у нерухомій позі. Параметри стабілізатора враховано у двох останніх рівняннях системи (18).

Система рівнянь (18) разом із початковими умовами (19) являє собою задачу Коші для диференціальних рівнянь другого порядку. Оскільки аналітичного розв'язку цієї задачі отримати неможливо, нами використано чисельний метод Рунге-Кутта з комп'ютерного пакету Mathematica 5.1, реалізований у програмі NDSolve (www.wolfram.com).

Приклад. Розглянемо сучасний спортивний лук з такими параметрами: $l_U = l_L = 48$ см; $m_U = m_L = 95,3$ г; $I_U = I_L = 63,44$ кгсм²; $r_U = r_L = 21,7$ см; $c_U = c_L = 12078$ Нсм; $\varphi_U = -0,06$; $\varphi_L = 0,06$; $h_U = h_L = 43,4$ см; $I_H = 2710$ кгсм²; $S_U = 80$ см; $S_L = 90$ см; $f = 11900$ Н; $m_s = 7$ г; $l_a = 70$ см; $m_a = 25$ г; $I_A = 55,5$ кгсм²; $r_A = 41,3$ см; $l_{st} = 1,486$ м; $m_{st} = 0,304$ кг; $c_{st} = 702$ Н/м. Із розв'язку задачі статки (14) отримано: $\eta_{A0} = 24$ мм; $\theta_{U0} = 0,826$; $\theta_{L0} = 0,694$. Поличка стріли розміщена на висоті $\eta_{P0} = 34$ мм.

Результати розв'язання задачі про динамічну стабілізацію лука подано у графічній формі (рис. 6). Стріла полишає тятиву в момент, коли їхнє спільне прискорення спадає до нуля. Тоді стріла набуває максимальної швидкості. Час спільного руху стріли з тятивою складає 15,8 мс. Графіки описують процес стабілізації у фазі внутрішньої балістики стріли. Поворот руків'я за годинниковою стрілкою частково компенсується згином стабілізатора у протилежному напрямі. Монотонний характер цих переміщень вказує на до резонансний режим процесу.

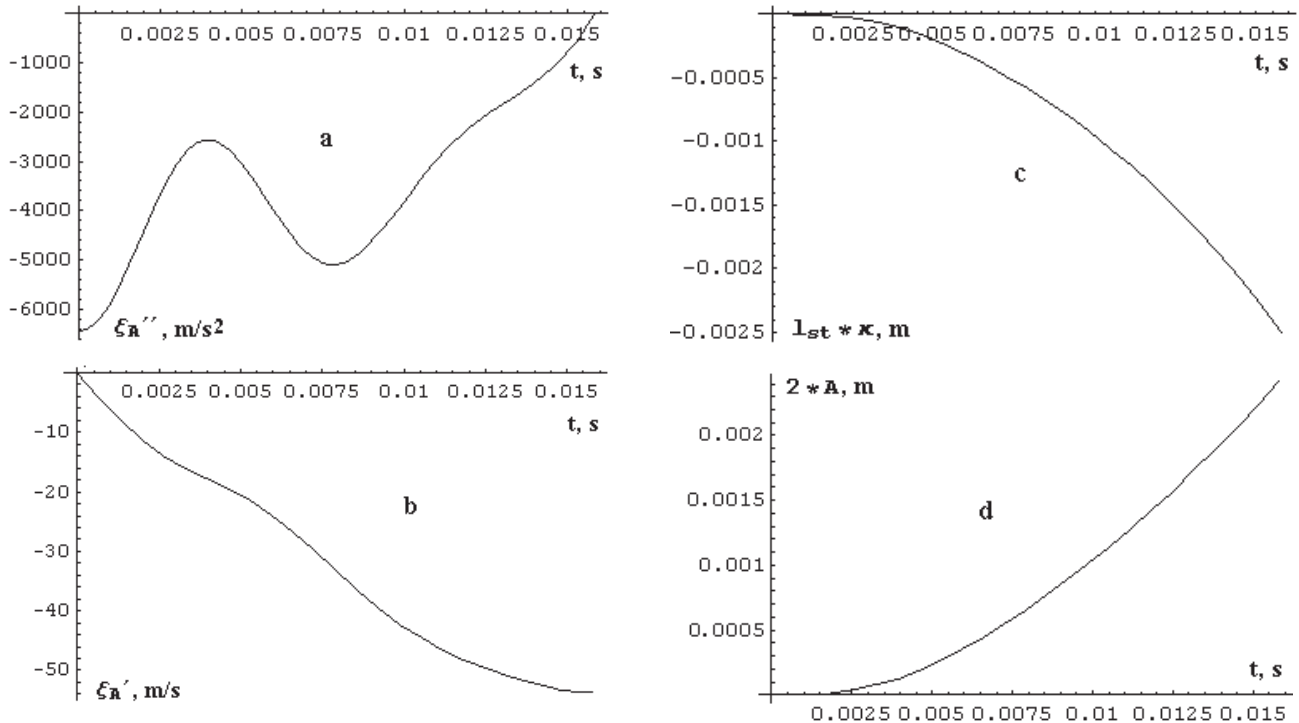


Рис. 6. Кінематичні параметри системи: поздовжнє прискорення стріли (а); поздовжня швидкість (б); добуток кута повороту стабілізатора на його довжину (с); переміщення вільного кінця стабілізатора тільки внаслідок його згинання (д).

Спільний рух стріли з луком має сильно нелінійний характер. У продовж руху поздовжнє прискорення стріли ξ_A'' зменшується приблизно з 640 g до 270 g, а потім знову зростає до 520 g (Рис. 6 а); у фінальній фазі прискорення спадає до нуля. Одночасно поздовжня проекція вектора швидкості стріли також змінюється за різко нелінійним законом, зростаючи до 52,8 м/с (див. Рис. 6 б). У цей час руків'я повертається на малий кут $\kappa = -0,0006$ рад (див. Рис. 6 с), тобто воно висувається вперед верхньою частиною. Ці дані добре підтверджуються результатами швидкісної відео зйомки [3].

Рівень і характер динамічної стабілізації певною мірою залежать від жорсткості стабілізатора. Результати обчислювального експерименту представлено в Таблиці 2. Можна помітити, що зростання жорсткості стабілізатора призводить до збільшення повороту руків'я. Для лука без стабілізатора ($\kappa = 0,00191$ рад) і лука з недеформівним стабілізатором ($\kappa_\infty = 0,00116$ рад) різниця у величині повороту руків'я складає 65 %.

З іншого боку, динамічний згин стабілізатора зменшується при збільшенні його жорсткості. Наприклад, для циліндричного стабілізатора ($c_{st} = 1000$ Н/м) величина згину в 1,6 рази більша, ніж для пакету з чотирьох стрижнів ($c_{st} = 2000$ Н/м) за такої самої маси. За решти рівних умов збільшення маси стабілізатора призводить до зменшення величини повороту руків'я у до резонансному режимі.

Таблиця 2
Кінематичні параметри системи лук-стабілізатор у момент випуску тятиви

c_{st} , Н/м	$-1000 \cdot \kappa$, рад	$2 \cdot A$, мм	$100 \cdot \kappa / \kappa_\infty$, %
∞	1,16	0	100
2000	1,45	1,32	125
1500	1,53	1,67	132
1000	1,62	2,16	140
500	1,73	2,62	149
0	1,91	—	165

Висновки. Для реальних співвідношень між мас-інерційними характеристиками лука і стабілізатора найкраще наближення до істинного значення частоти коливань основного тону системи (з відносною похибкою біля 1,1 %) можна отримати, використавши як гіпотетичну форму лінійної функції у комбінації з формою статичного згину консольного стрижня, навантаженого зосередженою силою на вільному кінці.

Спільний рух стріли з луком (внутрішня балістика) супроводжується інтенсивними коливаннями, викликаними порушенням статичного балансу сил в момент випуску стрільцем тятиви лука.

Динамічний згин стабілізатора зменшується при збільшенні його жорсткості. Так, для цилін-

Продовження на.35 с.

дричного стабілізатора величина згину в 1,6 рази більша, ніж для пакету з чотирьох стрижнів такої самої маси. За решти рівних умов збільшення маси стабілізатора призводить до зменшення величини повороту руків'я у до резонансному режимі.

Пропонована модель описує процес стабілізації лука у вертикальній площині. Поворот руків'я за годинниковою стрілкою частково компенсується згином стабілізатора у протилежному напрямі. Мονотонний характер цих переміщень вказує на до резонансний режим процесу.

Розроблений підхід до проблеми стабілізації лука у вертикальній площині показав свою придатність для розв'язання інженерних задач розробників спортивних луків, а також для практики лучного спорту. Модель стабілізатора і метод аналізу його роботи адаптовано для використання у СКМ. Кількісні результати комп'ютерного моделювання представлено у таблицях і графіках, що робить їх доступними для фахівців фізичного виховання і спорту, спортсменів і тренерів.

Список літератури

1. *Ellison S.* Controlling Bow Behaviour with Stabilisers. — 2000. (<http://www.tenzonzone.u-net.com/Equipment/stabilisation/pdfs/stab4a4.pdf>).
2. *Stuart B.* Standard Bow Manufacturing Manual (ed. J. Easton). — Lausanne: International Archery Federation (FITA), 1989.
3. *Zanevskyy I.* Modelling and computer simulation of bow stabilisation in the vertical plane // International Journal of Sports Science and Engineering. — 2008. — Vol. 2. — No. 1. — pp. 3—14.
4. *Zanevskyy I.* Archer-bow-arrow behaviour in the vertical plane // Acta of Bioengineering and Biomechanics. — 2006. — Vol. 8. — No. 1. — pp. 65—82.
5. *Zanevskyy I.* Bow tuning in the vertical plane // Sports Engineering. — 2006. — Vol. 9. — No. 2. — pp. 77—86.
6. *Блехман И.И., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г.* Прикладная математика: предмет, логика, особенности подходов. — К.: Наукова Думка, 1976. — 270 с.

Надійшла до редакції 09.04.2009

Заневский И. Моделирование процессов стабилизации спортивного лука в вертикальной плоскости.

Целью работы является создание метода механико-математического моделирования динамической стабилизации вращательных движений лука в вертикальной плоскости, годного для практического использования в лучном спорте. Задания исследования: разработать модель стабилизатора лука; оценить эффективность модели; провести вычислительный эксперимент процесса стабилизации спортивного лука в вертикальной плоскости. Методы: вариационный принцип Гамильтона, принцип Даламбера, метод Релея-Ритца, уравнения Лагранжа 2-го рода, метод Рунге-Кутты, методы теории колебаний и динамической устойчивости, метод Ньютона для системы нелинейных уравнений, численные методы систем компьютерной математики. Предлагаемый подход к проблеме стабилизации лука в вертикальной плоскости показал свою пригодность для решения инженерных задач разработчиков спортивных луков, а также практики лучного спорта.

Ключевые слова: спортивный лук, динамика, стабилизация, собственные формы, частоты.

Zanevskyy I. Modelling of processes of stabilisation of an archery sport bow in the vertical plane.

The aim of this research is creation of a method of mechanical and mathematical modelling of dynamic stabilisation of rotary bow movement in the vertical plane which is suitable for the practical utilisation in the sport of archery. Targets of the research are to develop a model of a bow stabiliser, to evaluate an efficiency of the model, and to transact a computational experiment of the process of a sport bow stabilisation in the vertical plane. Methods are Hamilton principle, d'Alembert principle, Rayleigh-Ritz method, Lagrange equations of the 2nd kind, Runge-Kutta method, methods of the theory of oscillations and dynamic stability, Newton method for a system of nonlinear equations, numerical methods of systems computer mathematics. The proposing attempt to the problem of bow stabilisation in the vertical plane demonstrated its suitability for solving engineering problems of sport bow constructions and the practice of the sport of archery.

Key words: sport archery bow, dynamics, stabilisation, natural forms, and frequencies.